Title	数式処理によるソリトン方程式の解法(数式処理と数学研究への応用)
Author(s)	広田, 良吾
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 486: 4-10
Issue Date	1983-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/103468
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
486巻 1983年 4-10

2. 数式処理によるソリトン方程式の解法

広大 工 広田 良吾 (Ryogo Hirota)

非線形偏微分方程式

$$\mathcal{L}(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots) = 0 \qquad (1)$$

の解を求めるために REDUCE がどのように使われているかを簡単に述べる。

議論を出来るだけ分かりやすくするために、ソリトン方程式として典型的な例である KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (2)$$

について述べるが、方法は他の方程式にも適用可能である。

(0) 2項演算子 D_x を導入する

$$D_x^n f(x)\cdot g(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x)\, g(x')\Big|_{x'=x} \qquad (3)$$

ここで n は自然数.

この定義は次の定義と等しい

If $n>0$, $D_x^n f\cdot g = D_x^{n-1} f_x\cdot g - D_x^{n-1} f\cdot g_x$.

$n=0$. $D_x^n f\cdot g = fg$.

だから REDUCE の言語で書くと,

```
FOR ALL N, X, F, G  LET  D(X,N,F,G) =
IF N>0 THEN  D(X,N-1, DF(F,X), G)
-D(X,N-1,F,DF(G,X))  ELSE  F*G ;
```

となる。

2変数 x, t を含む場合には

$$D_x^m D_t^n f(x,t)\cdot g(x,t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n f(x,t)\, g(x',t')\Big|_{x'=x,\, t'=t}$$

となるが、同様にして REDUCE 言語で表現出来る。

(I) 従属変数 u の変換を行い、(2)式を書き換える。

(A型) 変換 $u(x,t)=G(x,t)/F(x,t)$ (4)

公式
$$e^{\epsilon\frac{\partial}{\partial x}}\left(\frac{G(x)}{F(x)}\right)=\frac{e^{\epsilon D_x}G(x)\cdot F(x)}{\cosh(\epsilon D_x)F(x)\cdot F(x)} \tag{5}$$

を ϵ で展開して

$$\epsilon:\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{G}{F}=\frac{D_x G\cdot F}{F^2},$$

$$\epsilon^2:\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{G}{F}=\frac{D_x^2 G\cdot F}{F^2}-\frac{G}{F}\,\frac{D_x^2 F\cdot F}{F^2},$$

$$\epsilon^3:\quad \frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{G}{F}=\frac{D_x^3 G\cdot F}{F^2}-3\left(\frac{D_x G\cdot F}{F^2}\right)\frac{D_x^2 F\cdot F}{F^2},$$

$\cdots$ を得る。

(5)式を ϵ で展開して、ϵ の各 order を集める事は REDUCE の最も得意とする所で COEFF(Y(ϵ), ϵ, C) で ϵ^n の係数が Cn に格納される。だから $u=G/F$ の高次微分を求めるのは非常に簡単である。

(B型) 変換 $u(x,t) = 2[\log f(x,t)]_{xx}$ (6)

公式

$$2\cosh(\epsilon \frac{\partial}{\partial x})[\log f] = \log[\cosh(\epsilon D_x) f\cdot f] \quad (7)$$

を ϵ^2 で展開して

$$\epsilon^2 : \quad 2(\log f)_{xx} = \frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2},$$

$$\epsilon^4 : \quad 2(\log f)_{xxxx} = \frac{D_x^4 f\cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f\cdot f}{f^2}\right)^2,$$

… を得る.

A型変換 $u(x,t) = G(x,t)/F(x,t)$ の公式を (2) 式に適用すると

$$\frac{D_t G\cdot F}{F^2} + 6\frac{G}{F}\frac{D_x G\cdot F}{F^2} + \frac{D_x^3 G\cdot F}{F^3} - 3\left(\frac{D_x G\cdot F}{F^2}\right)\frac{D_x^2 F\cdot F}{F^2} = 0$$

となるので Decouple して, 次の双一次形式を得る

$$\left\{\begin{array}{l} (D_t + D_x^3) G\cdot F = -3\lambda D_x G\cdot F \\ D_x^2 F\cdot F - 2FG = \lambda F^2, \quad \lambda : \mathrm{const} \end{array}\right. \quad (8)$$

B型変換　$u(x,t)=2(\log f)_{xx}$ の公式を(2)式に使うために、ポテンシャル $w(x,t)$ を導入する：

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}w(x,t) \tag{9}$$

$w(x,t)$ を使うと(2)式は

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_t+3w_x^2+w_{xxx})=0 \tag{10}$$

となる。

ここで　$w=2(\log f)_x$ と変換すると　公式より

$$w_t=2(\log f)_{xt}=\frac{D_xD_tf\cdot f}{f^2},\quad w_x=\frac{D_x^2f\cdot f}{f^2},\cdots$$

が得られ (10)式 に代入すると、(10)式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\quad\frac{D_x(D_t+D_x^3)f\cdot f}{f^2}=0$$

となるので、次の双一次形式を得る

$$[D_x(D_t+D_x^3)-\lambda]f\cdot f=0,\quad \lambda=\mathrm{Const.} \tag{11}$$

一見簡単にみえる(2)式をわざわざ変換して(8)式や(11)式の双一次形式にするのは REDUCE が有理関数の演算を苦手とするからである。ソリトン方程式の解は有理関数で表わされるものが多いので、解を有理関数と仮定して、方程

式に代入し、分母を払って書き直したのが(8)式や(11)式の双一次形式なのである。方程式に作用する変換群の立場からみても双一次形式の方が見通しよくなるのだが、ここでは省略する。

(II) 解の予想とチェック

1. Polynomial solution：(8)又は(11)式の解が x, t の多項式である

$$\sum_{m,n=0}^{N} a_{mn} x^m t^n$$

と仮定して係数を逐次決めて行く。これは手計算でやると大変だが、REDUCEを使うと頭は使わずに手の運動（タイプを打つ）だけで出来る。

2. Exponential solution：(8)又は(11)式の解が指数関数 $\exp(px + \Omega t)$ の多項式と仮定して係数を決める。この場合も低次の多項式なら手の運動だけですむ。

以上のようにして与えられた偏微分方程式の特殊解を求める

事だけでなく、その他、逆散乱形式の導出、高次 Symmetry をもつ方程式のチェック、双一次微分方程式が N-ソリトン解をもつかどうかの判定など、あらゆる所で数式処理が役立っている。

References.

R. Hirota: "Direct Methods in Soliton Theory," in Solitons, ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey (Topics in Current Physics 17, Springer-Verlag, 1980).